



TITLE:

On odd degree parts of cohomology of sporadic groups whose Sylow p -subgroup is the extra-special p -group of order p^3 (Cohomology of Finite Groups and Related Topics)

AUTHOR(S):

Yagita, Nobuaki

CITATION:

Yagita, Nobuaki. On odd degree parts of cohomology of sporadic groups whose Sylow p -subgroup is the extra-special p -group of order p^3 (Cohomology of Finite Groups and Related Topics). 数理解析研究所講究録 1998, 1057: 17-21

ISSUE DATE:

1998-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62320>

RIGHT:

On odd degree parts of cohomology of
sporadic groups whose Sylow p -subgroup is
the extra-special p -group of order p^3

Nobuaki Yagita
(榑 田 伸 豊 茂 茨城大学教育学部)

Abstract. This talk is about the same titled
paper which is to appear in J. Algebra. Let G
be a finite group whose Sylow p -subgroup is
isomorphic to P_+^{1+2} : the extra special p group
of order p^3 and exponent p . The even degree
cohomology $H^{\text{even}}(G)(p)$ is studied by Tezuka-
Yagita. In this talk, we study the odd
degree parts $H^{\text{odd}}(G)(p)$ by using fact that

$$\Omega_1 : H^{\text{odd}}(G)(p) \longrightarrow H^{\text{even}}(G)(p)$$

is injective. Here Ω_1 is the operation induced
from the Milnor primitive on $H^*(G; \mathbb{Z}/p)$.

(内容) $E = P_+^{1+2}$ とする, つまり

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$$

なる central extension があって E の exponent は p

とする. (散在単純群, 素数) $= (G, p)$ のうち 17 の場合

G が E を p -Sylow subgroup に持つ. とくに

$$H^*(G)_{(p)} \subset H^*(E).$$

さらに Cartan-Eilenberg の stable elements theorem より

$$H^*(G)_{(p)} \cong H^*(E)^{W_G(E)} \cap_A i_A^* H^*(A)^{W_G(A)}$$

ここで $W_G(B) = N_G(B)/B \cdot C_G(B)$. これより理論的には

$H^*(G)_{(p)}$ が計算できるはずであるが、実際の invariant の計算は非常にめんどうである。

そこで Quillen の定理を思い出す。

$$r: H^{\text{even}}(G; \mathbb{F}_p) \longrightarrow \varinjlim_{\text{conj. class of } A: \text{elementary abelian } p\text{-group of } G} H^{\text{even}}(A; \mathbb{F}_p)$$

は \mathbb{F} -isomorphism

(つまり $\text{Ker } r \subset \sqrt{0}$ で $\forall x$ に対し $x^{p^3} \in \text{Im } r$).

さらに $\text{rank}_p G = 2$ のとき

$$r: H^{\text{even}}(G)_{(p)} \longrightarrow \varinjlim_A H^{\text{even}}(A)$$

の $\text{Ker } r = \sqrt{0}$ がいえる。

これを具体的な場合に考えてみる。簡単のために $p=3$ を仮定する。 $p=3$ のとき

$$H^{\text{even}}(E) \cong (\widehat{\mathbb{Z}}/3[y_1, y_2] / (y_1^3 y_2 - y_1 y_2^3) \oplus \mathbb{Z}/3\{b\}) \oplus \widehat{\mathbb{Z}}/9[v]$$

ここで $\widehat{\mathbb{Z}}/3[a] = \mathbb{Z}[a]/(3a)$,

$$|y_i| = 2, |b| = 4, |v| = 2 \cdot p = 6 \quad \text{で}$$

$$y_i b = y_i y_j^2 \quad i \neq j, \quad b^2 = (y_1 y_2)^2 \quad \text{が成り立つ}$$

したがって

$$\sqrt{0} = \mathbb{Z}/3 \{ 3 \cdot v^s \mid s \geq 1 \}.$$

そこで G が $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ の conjugacy class が 唯一つしか
もたないと仮定すると

$$H^{\text{even}}(G)_{(3)}/(3) \hookrightarrow H^{\text{even}}(A)^{W_G(A)} = \mathbb{Z}/3[t_1, t_2]^{W_G(A)}$$

$G = R_u$, J_4 のとき conjugacy class の数は 1 で $W_G(A) = GL_3(\mathbb{F}_3)$
が知られている。ゆえに

$$H^{\text{even}}(J_4)_{(3)}/(3) \simeq \mathbb{Z}/3[t_1, t_2]^{GL_3(\mathbb{F}_3)} \stackrel{\text{Dickson algebra}}{=} \mathbb{Z}/3[D_1, D_2].$$

ゆえに, この場合

$$H^{\text{even}}(J_4)_{(3)} \simeq \tilde{\mathbb{Z}}/3[D_2] \otimes \tilde{\mathbb{Z}}/9[D_1]$$

$$\text{そこで } D_1 = (y_1^2 + y_2^2 + b)^3 + v^2, \quad D_2 = (y_1^2 + y_2^2 + b)v^2$$

in $H^*(E)$ ととれる。

他の場合も, 上のアイディアで $H^{\text{even}}(G)_{(p)}$ が千塚-柳田
で計算されている。

それで odd degree の場合だが, 当然 $H^{\text{odd}}(G)_{(p)} \subset \sqrt{0}$
より Quillen の定理は直接にはつかえない ($H^*(A)$ に制限
するという考えはやはり重要だが)。まず $H^{\text{odd}}(E)$ をみる

$$H^{\text{odd}}(E) \simeq \mathbb{Z}/3[y_1, y_2, v] \{a_1, a_2\} / (y_1 a_2 - y_2 a_1, y_1^p a_2 - y_2^p a_1).$$

そこで $|a_i| = 3$ 。そこで

$$Q_1: H^{\text{odd}}(E) \longrightarrow H^{\text{even}}(E)$$

$$\text{by } Q_1(\sum f_i(y_1, y_2, v) a_i) = \sum f_i(y_1, y_2, v) y_i v$$

が injective になっている事に注意する。この Q_1 は $H^*(-; \mathbb{F}_p)$ の cohomology operation の Milnor primitive $Q_1 = \beta\phi^1 - \phi^1\beta$; β : Bockstein ϕ^1 : reduced power から induce されたもので naturality がある。つまり

$$Q_1: H^{\text{odd}}(G)_{(p)} \longrightarrow H^{\text{even}}(G)_{(p)}$$

が injective な事がいえる。ゆえに次の系がなりたつ。

$$H^{\text{odd}}(G)_{(p)} \cong \left(H^{\text{even}}(G)_{(p)} \cap \text{Ideal}(y_1v, y_2v) \text{ in } H^{\text{even}}(E) \right)$$

これより $(G, p) = (J_4, 3)$ の場合を計算すると

$$D_1, D_2 \notin \text{Ideal}(y_1v, y_2v) \text{ だが}$$

$$D_2^2 = (y_1^2 + y_2^2 + b)^2 v^2 \in \text{Ideal}$$

(ここで $y_1b = y_1y_2^2$, $y_2b = y_2y_1^2$, $b^2 = y_1^2y_2^2$ を使った)。ゆえに

$$H^{\text{odd}}(J_4)_{(3)} \cong \mathbb{Z}/3[D_1, D_2] \setminus \{Q_1^{-1}(D_2^2)\}.$$

$$v^2(y_1va_1 + y_2va_2 + by_1va_1)$$

さらに $H^*(J_4)_{(3)}$ がわかったので $H^*(J_4; \mathbb{F}_4)$ もわかり

$$H^*(J_4; \mathbb{F}_3) \cong \mathbb{Z}/3[D_1, D_2] \otimes \wedge(D'_1, D'_2)$$

$$|D'_i| = |D_i| - 1.$$

このように一般に $H^*(G; \mathbb{F}_p)$ を計算するとき、理論的には直接計算が良いとされているが、まず $H^*(G)_{(p)}/\sqrt{0}$ 次に $H^{\text{even}}(G)_{(p)}$, 次に $H^{\text{odd}}(G)_{(p)}$ そして最後に $H^*(G; \mathbb{F}_p)$ を求めるのが、実際的なやり方だと、筆者は考えている。

operation Q_1 は最初 BP (Brown-Peterson)-theory を
考えていて思いついた。最近 は だれ も 信 じ ない 予想

$$BP^*(BG) \cong BP^{\text{even}}(BG)$$

は, この場合正しく. $BP^*(BG)$ の収束する Atiyah-Hirzebruch
spectral sequence

$$E_2^{*,*} = H^*(BG; BP^*) \Rightarrow BP^*(BG)$$

を考えると

$$d_{2p-1}(x) = v_1 \otimes Q_1(x)$$

ここで $BP_*^* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$, $|v_i| = -2(p^i - 1)$ として
いる。この時 $d_r(x) = 0$ $r \geq 2p$ が知られていて

$$E_{2p}^{*,*} \cong E_{\infty}^{*,*} \cong \text{gr } BP^*(BG) = \text{gr } BP^{\text{even}}(BG)$$

したがって d_{2p-1} は injective で 正確には

$$Q_1 = v_1^{-1} d_{2p-1} : H^{\text{odd}}(G)_{(p)} \rightarrow H^{\text{even}}(G)_{(p)}$$

が injective がいえる。